

LOS FRACTALES COMO REALIDAD MULTIDISCIPLINAR: UNA PROYECCIÓN SOBRE EL ÁMBITO DE LA SANIDAD

Esther Amez González

Profesora de Matemáticas (IES) e investigadora en Redes fractales

1. QUÉ SON LOS FRACTALES

Recientemente se ha incorporado a la Biología un gran cuerpo de conocimientos teóricos provenientes de las Matemáticas y la Física, impregnando así los cimientos de la Biología y de la Medicina. Conceptos como complejidad, caos dinámico, fractales, sistemas disipativos y autoorganización, ya no son ajenos a estas disciplinas.

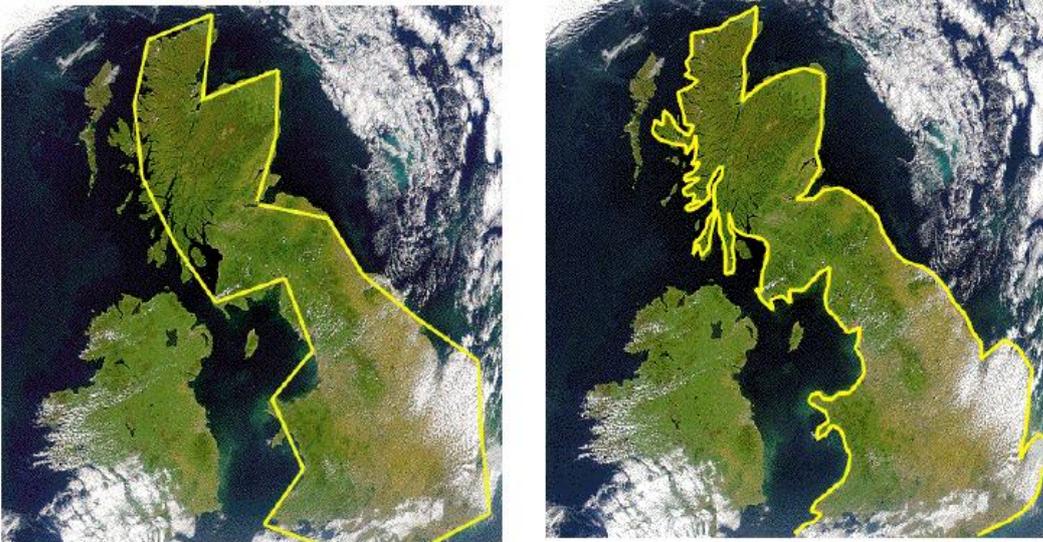
El objetivo de este artículo es analizar los conceptos más relevantes que emergen de las ciencias de la complejidad, mostrando ejemplos y derivando consecuencias que podrían ser de utilidad conceptual y práctica en la *Medicina* y la sanidad.

Los fractales fueron concebidos aproximadamente en 1890 por el francés Henri Poincaré. Sus ideas fueron extendidas más tarde fundamentalmente por dos matemáticos también franceses, Gaston Julia y Perre Fatou, hacia 1918. Se trabajó mucho en este campo durante varios años, pero el estudio quedó congelado en los años veinte. El estudio fue renovado a partir de 1974 en IBM y fue fuertemente impulsado por el desarrollo de la computadora digital. El Doctor Mandelbrot de la Universidad de Yale, con sus experimentos de computadora, es considerado como el padre de la Geometría Fractal. En honor a él, uno de los conjuntos que él investigó fue nominado con su nombre.

Para algunos matemáticos los fractales son como la vida, en el sentido de que se conoce la lista de sus propiedades pero es difícil dar con una descripción universal y absoluta de "fractal". Una de sus propiedades consiste en que la estructura de sus partes es similar -no necesariamente idéntica- a la del conjunto entero. Algunos ejemplos son un árbol, con sus ramas, una coliflor, aparentemente formada por un sinnúmero de minicoliflores unidas, la línea de costa de un país...

Mandelbrot comienza la introducción de su libro "Geometría fractal en la naturaleza" (1982) de la siguiente forma: "Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, los litorales no son circulares, y los ladridos no son suaves, lo mismo que los relámpagos no viajan en línea recta". (Mandelbrot, The fractal geometry of nature, 1982).

Concedemos la palabra al propio Mandelbrot: "¿Por qué a menudo se describe la geometría como algo *frío* y *árido*? Sí, es incapaz de descubrir la forma de la nube, una montaña, una costa o un árbol, porque ni las nubes son esféricas, ni las montañas cónicas, ni las costas circulares, ni el tronco de un árbol cilíndrico, ni un rayo rectilíneo (.). Creo que muchas formas de la naturaleza son tan irregulares y fragmentadas que la naturaleza no sólo presenta un grado mayor de complejidad, sino que ésta se nos revela completamente diferente (.). La existencia de estas formas representa un desafío: (.) la investigación de la morfología de lo "amorfo" (.). En respuesta a este desafío, concebí y desarrollé una *nueva geometría de naturaleza* y empecé aplicarla a una serie de campos. Permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a teorías coherentes, identificando una serie de formas que llamo *fractales* (.). Algunos conjuntos fractales (tienen) formas tan disparatadas que ni en las ciencias ni en las artes ha encontrado palabras que lo describieran bien".



Benoit Mandelbrot nos propone la siguiente pregunta en su libro antes citado: ¿Cuánto mide la costa de Inglaterra?. Depende de la unidad de medida que utilizemos. Pero según dicha medida se acerca a 0, la longitud de la curva se va aproximando a infinito. Esta dificultad a la hora de medir la longitud de una curva debido a la irregularidad de la misma, es característica de las curvas y superficies fractales.

2. FRACTALES: LA GEOMETRÍA DE LA NATURALEZA

Sabido es que la geometría nació en Grecia como un intento para comprender la naturaleza a través de la idealización de las formas. Sin embargo, en la naturaleza es muy difícil encontrar estas figuras geométricas ideales.

Mandelbrot aplicó el concepto de fractal a los objetos de morfología irregular, plegados sobre sí mismos o ramificados. Inicialmente restringidos a objetos abstractos, posteriormente el mismo Mandelbrot extendió el concepto a las formas de la naturaleza.

Si tomamos en la mano una hoja de papel, ésta representa un plano, cuya dimensión es $D = 2$. Si ahora, arrugamos fuertemente esta hoja hasta formar una pelota de papel: ¿Qué dimensión tiene ahora, 2 ó 3? Este objeto, aun ocupando un espacio de dimensión 3, sigue siendo un plano de dimensión 2. Esta es una de las propiedades de los objetos fractales: la capacidad de «vencer» su propia dimensión, mediante convolución o fraccionamiento, ocupando un espacio de dimensión superior. Para caracterizar este hecho se utiliza el concepto matemático de dimensión fractal:

$$D_F = \frac{\text{Ln}(N(\varepsilon))}{\text{Ln}(1/\varepsilon)}$$

donde Ln representa al logaritmo neperiano o natural, $N(\varepsilon)$ el número de elementos de longitud ε en que se puede dividir el objeto. En el caso de los objetos fractales esta dimensión es no entera.

Una segunda característica de los objetos fractales es la propiedad de la *autosimilitud*, caracterizada por la presencia de «simetrías» invariantes bajo contracción o expansión (invarianza bajo escala). Cada parte debería ser una reducción geométrica de la totalidad con la misma escala en todas las direcciones, sin embargo, hoy día el concepto se ha extendido en sentido amplio a mayor número de escalas.

Otra característica que se observa en los fractales creados por el ser humano es la *iteración*: el proceso de creación de un fractal es repetitivo.

Existen muchos ejemplos de morfología fractal en la naturaleza: las neuronas, el tubo digestivo y sus pliegues, la superficie alveolar, el árbol bronquial, la vascularización, los árboles, las costas etc. Sin embargo, las formas naturales difieren de los fractales matemáticos en que son estructuras finitas, donde la autosimilitud no puede mantenerse hasta el infinito.

Así, en general, pareciera que las estructuras terminales no fueran similares a la totalidad. Ni las hojas se parecen al árbol ni los alvéolos a la vía aérea.

Pero esto no es del todo cierto. Si profundizamos en la estructura de un bosque podemos concluir, y esto es un hecho sorprendente que llevaron a cabo científicos asesorados por el propio Mandelbrot, que un árbol lleva toda la información del bosque del que procede, al igual que en una hoja podría estar también toda la información del árbol al que pertenece. No hay más que encontrar la escala adecuada para medir este hecho.

Actualmente se utilizan los fractales para diseñar árboles, nubes, células cancerígenas, moléculas de proteínas, la expansión de enfermedades contagiosas, el agrietamiento de los materiales de construcción, propiedades fractales en la formación de tejidos de los pulmones y de los huesos, etc., la cual facilita su estudio para intentar acercarnos a su comportamiento y evolución en su estado natural.

Asimismo, se emplean en el examen del movimiento browniano (movimiento caótico de las moléculas en los fluidos) y en el análisis de la dinámica económica (para describir los altos y bajos de la economía). Los fractales se han utilizado en crear arte, diseñar paisajes para películas y para componer música. La geometría fractal utiliza como herramienta básica los algoritmos.

En el terreno de la Biología, por ejemplo, podemos hacer referencia a las reglas de crecimiento del filamento celular. Si suponemos que una célula en estado A, al dividirse, generará una célula en estado A y una célula en estado B, y lo representamos mediante la terminología $A = AB$. Y suponemos que una célula en estado B, al dividirse, generará el siguiente resultado: $B = BA$. Obtendremos un crecimiento como el anterior. A la condición inicial (o axioma) y al conjunto de reglas de producción (o sustitución) lo denominamos L-system. El precursor de los L-systems fue, en cierto modo Noam Chomsky, creador de las gramáticas de Chomsky para el estudio teórico de los lenguajes naturales. Las gramáticas de Chomsky son un conjunto de símbolos y unas reglas de producción. Partiendo de una "frase" inicial las reglas de producción se aplican secuencialmente: "a la cola" y de una en una. En ese momento esplendoroso de la teoría de lenguajes formales, Lindenmayer pensó en utilizar este método para desarrollar una axiomática del proceso de desarrollo en organismos pluricelulares. Puesto que las células se regeneran constantemente y de forma independiente, los L-system aplican sus reglas en paralelo. En 1984 Alvy Ray Smith utiliza los L-system como herramienta para la síntesis realista de plantas y estudia su relación con los fractales ampliando sus posibilidades.

3. DINÁMICAS NO LINEALES, CAOS Y SU RELACIÓN CON LOS FRACTALES

La palabra Caos habitualmente se asocia a *desorden*. Sin embargo, en términos matemáticos y físicos el Caos determinístico corresponde a la irregularidad impredecible de las trayectorias temporales de un cierto sistema. Su origen se encuentra en sistemas que, aunque pueden ser muy simples, son no-lineales y muy sensibles a las condiciones iniciales.

Los sistemas lineales son sistemas del tipo $X' = F(X,t)$, donde X' representa la variación instantánea (derivada) de una variable, X es la variable, t el tiempo y $F(X,t)$ es una función lineal, pareciéndose a la ecuación de una recta. Los sistemas lineales son siempre predecibles. Su conducta se

puede representar en el llamado *Espacio de fases*, que corresponde a una representación de la variación en el tiempo de las coordenadas (x,y) de la variable X.

En los sistemas no-lineales la función $F(X,t)$ no es lineal. En éstos, los ejes coordenados (o variedades) que los definen son curvas que pueden entrecruzarse generando nuevos puntos.

Podemos visualizar matemáticamente el espacio de fases de un sistema no lineal como un campo «minado» por un conjunto de puntos y líneas que condicionan las trayectorias del sistema. En estos sistemas, las trayectorias son dependientes de la cercanía con este entramado de puntos y líneas, pudiendo ocurrir que dos puntos que inician su trayectoria muy cerca uno del otro, se encuentren en posiciones muy alejadas después de un pequeño intervalo de tiempo. Esto es lo que se conoce como sensibilidad a las condiciones iniciales.

En el ámbito sanitario, por ejemplo, si el sistema que regula la incidencia de la Meningitis fuera así, podríamos partir hoy con dos casos en Pinto y tres en Valdemoro (dos valores muy cercanos), y tener después de una semana un caso en Pinto y cuarenta y cinco en Valdemoro (dos valores muy diferentes). En los sistemas caóticos, la dinámica es impredecible e irregular y sin embargo, es determinista, o sea se encuentra perfectamente determinada en la función que la define. Esto es lo que debemos entender por Caos.

El Caos puede aparecer en sistemas muy simples desde la perspectiva de los componentes. May (1976) mostró que sistemas con sólo dos componentes, pueden tener dinámicas muy complejas, estableciendo claramente la diferencia entre complejidad estructural (componentes) y complejidad dinámica (caos).

A pesar de la irregularidad o inestabilidad instantánea o puntual de las trayectorias, éstas convergen hacia una figura o conjunto límite en el espacio de fases que se denomina *atractor*. En el caso de los sistemas caóticos, por su especial morfología convolucionada se conocen como *atractores extraños*. Este, a pesar de contener trayectorias inestables en todos sus puntos, como conjunto límite puede permanecer con la misma forma a lo largo del tiempo. Es decir, puede ser estructuralmente estable (o robusto). Refinamientos posteriores del estudio de la dinámica en general, han permitido reconocer algunos patrones en las trayectorias. La no-linealidad es la norma en los sistemas y seres vivos y las dinámicas caóticas son habituales a nivel de la Fisiología, de la Epidemiología y de la conducta humana.

En la mosca *Drosophila melanogaster* episodios de aparente actividad continua contienen episodios más cortos de inactividad, que aparecen similares independientemente de la escala de medida. Es decir, la contribución general de episodios de actividad e inactividad tiene una estructura fractal. Se ha observado así que la complejidad del patrón de actividad locomotora en las moscas más viejas es más regular que en las moscas jóvenes.

4. ALGUNAS PROYECCIONES MÉDICAS DEL CAOS Y LOS FRACTALES

A) Cáncer y Caos

El Cáncer sigue las reglas del Caos. Así, es posible anticipar la aparición de un tumor a través de fractales porque ambos evolucionan de forma parecida.

Son científicos austriacos los que han descubierto este comportamiento del Cáncer según las reglas del caos y que es posible anticipar su aparición y desarrollo mediante fractales construidos con algoritmos específicos; las simulaciones informáticas y los tumores evolucionan de forma parecida, uno en el mundo virtual, el otro en un organismo vivo. La comprobación de la relación entre la Teoría

del caos y los procesos cancerígenos tiene una gran importancia para profundizar en el conocimiento de la enfermedad, en la formulación de diagnósticos y en la elaboración de terapias.

Tumor real, Tumor fractal...: El caos se oculta detrás del comportamiento lineal observado en los procesos cancerígenos, según una investigación desarrollada en el Hospital General de Viena (Austria) que ha establecido que el crecimiento de un tumor obedece a un algoritmo que produce imágenes fractales.

El desarrollo del cáncer se ha observado tradicionalmente como un proceso lineal o secuencial que se repite en todos los casos: pequeños cambios moleculares provocan que células sanas se vuelvan cancerosas y, en función de los tejidos afectados y del tipo de tumor, el cáncer se desarrolla según Modelos estadísticos generalmente exactos.

Sin embargo, en estudios realizados sobre procesos cancerígenos, ha podido apreciarse que los tumores “oscilan”, es decir, que su superficie cambia permanentemente a lo largo del tiempo: la mayor parte del tiempo el tumor es esférico, pero luego sus formas varían caóticamente adoptando aspectos imprevisibles.

Con la ayuda de algoritmos específicos confeccionados sobre estos tumores, los investigadores han podido desarrollar ecuaciones de crecimiento sobre estos procesos que luego han procesado informáticamente.

B) Fractales y tumores

El resultado obtenido en el anterior estudio son unos *fractales* muy parecidos a los tumores reales, algo que estos investigadores ya habían observado y publicado en 2002. En esta ocasión, han conseguido predecir cómo se desarrollará un tumor de cáncer de mama gracias a las simulaciones creadas por el ordenador.

Eso significa que el tumor canceroso se desarrolla siguiendo una fórmula matemática y que detrás del orden lineal o secuencial que sigue el desarrollo de un tumor, realmente se ocultan los procesos naturales del caos.

De hecho, el cáncer tal como se le conoce sigue un proceso muchas veces caprichoso: su crecimiento puede interrumpirse sin causa aparente o por intervenciones médicas que a veces funcionan y a veces no, lo que desvela que el organismo humano se desenvuelve entre el orden y el caos, al igual que las demás manifestaciones de la naturaleza.

C) Análisis multifractal para la complejidad

La comprobación de la relación entre la Teoría del caos y los procesos cancerígenos tiene una gran importancia para profundizar en el conocimiento de los procesos de la enfermedad, en la formulación de diagnósticos y en la elaboración de terapias.

El descubrimiento ha sido posible gracias al *análisis multifractal* que es una poderosa herramienta matemática que permite caracterizar objetos complejos. Descompone estructuras y descubre las relaciones que mantienen entre sí sus diferentes componentes, al mismo tiempo que permite trazar posibles evoluciones o comportamientos de estas estructuras.

Aplicada a los tumores, la técnica de análisis multifractal ha permitido mejorar los parámetros de un núcleo cancerígeno y descubrir que su desarrollo combina fases estables y fases caóticas. El análisis multifractal ha determinado asimismo el mejor momento para aplicar terapias específicas: cuando el tumor atraviesa su período más caótico.

Lo que realmente hace el análisis multifractal es representar la complejidad de una forma exacta y reproducible. Gracias a esta poderosa herramienta, los objetos naturales animados pueden ser descritos en lenguaje matemático, lo que evidencia que la analogía entre los productos geométricos creados en ordenador y los tumores cancerígenos reales no es superficial.

D) Los fractales en la Cardiología

Otro campo médico en el que se ha experimentado el trabajo con fractales ha sido el cardiológico. La dimensión fractal del tejido cardíaco ha permitido descubrir que los corazones predispuestos a manifestar una lesión tienen una dimensión fractal más elevada.

Gracias a esta detección, se ha podido conocer la existencia de un cáncer antes de que el tumor aparezca físicamente en el tejido cardíaco del paciente, lo que ha permitido mejorar sustancialmente el diagnóstico precoz de esta enfermedad.

Son trabajos asociados al mismo equipo investigador del Hospital de Viena, que en años precedentes han podido establecer que la dimensión fractal de un tumor puede ser utilizada como medida objetiva en los estados preliminares del cáncer de colon y de útero.

Otros ejemplos de fractales son las redes vasculares y la vía respiratoria. Ellos además son ejemplos de optimización caracterizada por una mínima resistencia hidrodinámica y mínima producción de entropía. También la superficie alveolar ha sido descrita como un fractal de dimensión 2 que presenta avanzados aspectos de optimización a nivel de la barrera alveolo-capilar.

Así, la superficie interna de la vía respiratoria y del tubo digestivo obedecería a un principio general de optimización, que conduce a una morfología fractal. Ambas superficies necesitan maximizar la adquisición de energía y materiales y ambas se despliegan en volúmenes restringidos.

5. CRITICALIDAD, UNIVERSALIDAD Y REDES FRACTALES

Subyacente a la diversidad de los sistemas vivos y la complejidad de su conducta, origen o función, es posible encontrar un orden o geometría que refleja la operación de procesos físicos o biológicos fundamentales.

La universalidad de las leyes de potencia y la universalidad de las características dinámicas parecen revelar un principio aún no comprendido, común a todo sistema vivo. Por ejemplo, las leyes de potencia que desvelan la ausencia de una escala característica, son comunes en la Fisiología y la Ecología. Además, en las dinámicas de un gran número de procesos biológicos es posible detectar las dinámicas complejas. Por ejemplo, en las necesidades de insulina en diabéticos, la frecuencia cardíaca en sujetos normales, el brote de semillas, conducta en ratas, dinámica de poblaciones de insectos y parásitos, extinciones de especies, fluctuaciones de modulación en emisiones de radio tan distintas como una conversación y un concierto clásico y reproducción de intervalos espaciales en el aprendizaje.

Uno de los ejemplos clásicos de *universalidad* y *criticalidad* de sistemas es la percolación. Este fenómeno se encuentra habitualmente en Biología en la propagación de epidemias (geometría del contagio) y en la propagación de incendios forestales. Otras evidencias de sistemas críticos en biología se encuentran en los cambios de fase en la conducta de forrajeo en hormigas, en la diversidad de paisajes boscosos, dinámica metapoblacional, epidemias en poblaciones de insectos, distribución de espacios abiertos en bosques y la extinción de especies de aves en las islas hawaianas.

Existe una nueva conexión entre los fractales y éstos últimos fenómenos naturales mencionados y son las *Redes fractales*.

Las redes aleatorias con topología compleja son comunes en la Naturaleza y en el mundo real, describiendo sistemas tan diversos como redes de interacción de proteínas, redes de cristales en química, la WWW o redes sociales y de negocios.

El estudio de redes aleatorias ha estado dominado por modelos matemáticos como el de Erdős-Rényi (ER), que describe la red como un conjunto de nodos, los cuales están conectados de dos en dos con igual probabilidad.

Recientemente se ha demostrado que la mayoría de las grandes redes de las que tenemos información topológica fiable nos ofrecen estas características SF. La dificultad para describirlas radica en su topología: muchas de ellas representan redes complejas, cuyos vértices son los elementos de los sistemas, y los bordes representan las interacciones entre ellos.

Después de algunos años, investigadores de campos tan diversos como la WWW, Internet, algunas redes de sistemas metabólicos de células, redes sociales como la red de actores que intervienen en la misma película de Hollywood, descubrieron que dichas redes están dominadas por unos pocos nodos (llamados hubs) que tienen un gran número de conexiones a otros nodos de la red.

Fué en 1998, cuando Barabási y Eric Bonabau, junto con otros científicos de la Universidad de Notre Dame (Hawoong Jeong y Réka Albert) que realizaban un estudio completo sobre la WWW, esperando encontrar una red aleatoria, encontraron un resultado sorprendente en cuanto a que unas pocas páginas web con un número alto de conexiones estaban dominando la WWW, y que el 80% de las páginas web tenían poco más de cuatro enlaces, y menos del 0,01% tenían más de 1.000 enlaces, lo que hemos mencionado anteriormente en cuanto a las redes SF.

Las redes que contienen los hubs, son rápidamente denominadas “scale-free”, debido a que no hay un número de enlaces típico o dominante por nodo, sino que hay algunos pocos que tienen muchas conexiones y el resto, que son la inmensa mayoría de nodos de la red, tiene muy pocas conexiones. Estas redes tienen una característica común: son muy resistentes a ataques indiscriminados, pero muy vulnerables a ataques coordinados o dirigidos a determinados nodos (hubs). Este descubrimiento ha cambiado radicalmente nuestra manera de ver el mundo interconectado que nos rodea, y los hubs ofrecen la prueba de que sistemas complejos muy diversos, tienen la misma estricta arquitectura regida por las mismas leyes que se puede aplicar igualmente a células, computadoras, lenguajes y sociedad, y que permiten desarrollar estrategias comunes que nos posibiliten organizar tanto defensas de ataques de hackers informáticos, como vacunas contra el desarrollo de epidemias, o estructuras que nos permitan tener energía eléctrica o comunicación de Internet segura, aunque estos sistemas tengan fallos.

Si estos hubs en lugar de concentrarse entre ellos, se diseminan ampliamente por toda la red, la resistencia a los ataques será mayor, ésta puede ser la característica de la fractalidad de la red, o sea la repulsión entre hubs facilita la resistencia de la red a romperse ante un ataque indiscriminado o sea al azar.

Cabe señalar finalmente que el estudio y la aplicación de las redes y sus características explícitas e implícitas, tales como su fractalidad, así como su proyección sobre los sistemas vivos, es un campo tan interesante como prometedor en el ámbito de la investigación de carácter multidisciplinar.